- модель материала – сплошная, однородная, изотропная среда, имеющая следующие характеристики:
    - E – модуль упругости;
    - μ – коэффициент Пуассона;
    - $\sigma_{пц}$- предел пропорциональности.
- расчетный элемент – стержень, который представляется продольной осью и поперечным сечением. Последнее имеет следующие геометрические характеристики:
    - ЦТ - центр тяжести;
    - А – площадь;
    - J_x и J_y – главные центральные моменты инерции, вычисляемые относительно главных центральных осей инерции.
- опорные закрепления;
- внешние силовые воздействия:
    - линейно-распределенные силы и моменты;
    - сосредоточенные силы и моменты.

Перейдем к рассмотрению расчетной схемы.

3.Опорные реакции

Опорными реакциями называют усилия, которые возникают в связях, соединяющих упругую систему с землей, от внешней нагрузки. Это те силы, которыми земля действует на систему, удерживая ее от смещения «как жесткого целого» под действием внешней нагрузки. Пользуясь знаниями, которые оставил нам великий И. Ньютон в виде своего 3-го закона, можем утверждать, что точно такими же силами наша конструкция действует на землю и этот результат может быть использован для расчета фундамента.

Способ определения опорных реакций, состоящий в рассмотрении равновесия тела, находящегося под действием внешних сил и реакций опор, был получен ранее в курсе теоретической механики.

Напомним, в чем состоял этот способ.

Жесткое тело, закрепленное от смещений в плоскости и загруженное внешне нагрузкой, остается неподвижным. Если освободить его от связей, вместо которых приложить к телу неизвестные силы,- опорные реакции, то их величины можно определить, потребовав, что бы система сил, включающая в себя внешние нагрузки и опорные реакции, находилась в равновесии, что и обеспечит неподвижность тела в свободном от закреплений состоянии.

Условия равновесия плоской системы сил (неподвижности тела, освобожденного от связей) записываются в виде системы 3-х линейных алгебраических уравнений, являющихся по сути своей уравнениями равновесия.

Эту систему можно записать по-разному, например, так:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} P_{ix} + \sum_{j=1}^{3} R_{jx} = 0\\ \sum_{i=1}^{n} P_{iy} + \sum_{j=1}^{3} R_{jy} = 0\\ \sum_{i=1}^{n} m_{\alpha Pi} + \sum_{j=1}^{3} m_{\alpha Rj} = 0.\end{cases}$$

Здесь первые два уравнения выражают равенство нулю сумм проекций всех внешних сил и реакций на некоторые оси «X» и «Y», лежащую в плоскости тела, а 3-е уравнение равенство нуль моментов всех внешних сил и реакций, относительно некоторой точки α, находящейся в той же плоскости. Можно доказать, что если оси «X» и «Y» неколиннеарны, система уравнений имеет единственное решение относительно R_j.

На практике, чаще используется другая форма записи уравнений равновесия, эквивалентная предыдущей, т.к. уравнения, входящие в нее являются линейной комбинацией уравнений первой системы:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} m_{\alpha Pi} + \sum_{j=1}^{3} m_{\alpha Rj} = 0\\ \sum_{i=1}^{n} m_{\beta Pi} + \sum_{j=1}^{3} m_{\beta Rj} = 0\\ \sum_{i=1}^{n} m_{\gamma Pi} + \sum_{j=1}^{3} m_{\gamma Rj} = 0.\end{cases}$$

В этом случае каждое их уравнение требует равенства нулю сумм моментов внешних сил и опорных реакций относительно трех точек α, β и γ, расположенных в плоскости тела и не лежащих на одной прямой.

Не трудно сообразить, что если в качестве α, β и γ выбирать точки, в которых попарно пересекаются линии действия опорных реакций, то последняя система распадется на отдельные независимые уравнения, что упрощает поиск неизвестных опорных реакций. Конечно, при этом, нужно иметь в виду, что если линии действия каких-то двух реакций параллельны, и моментная точка уходит в бесконечность, то уравнение моментов, относительно такой точки, «вырождается» в уравнение суммы проекций сил на ось, перпендикулярную линиям действия этих реакций. Сказанное иллюстрирует Рис.3- 1 .

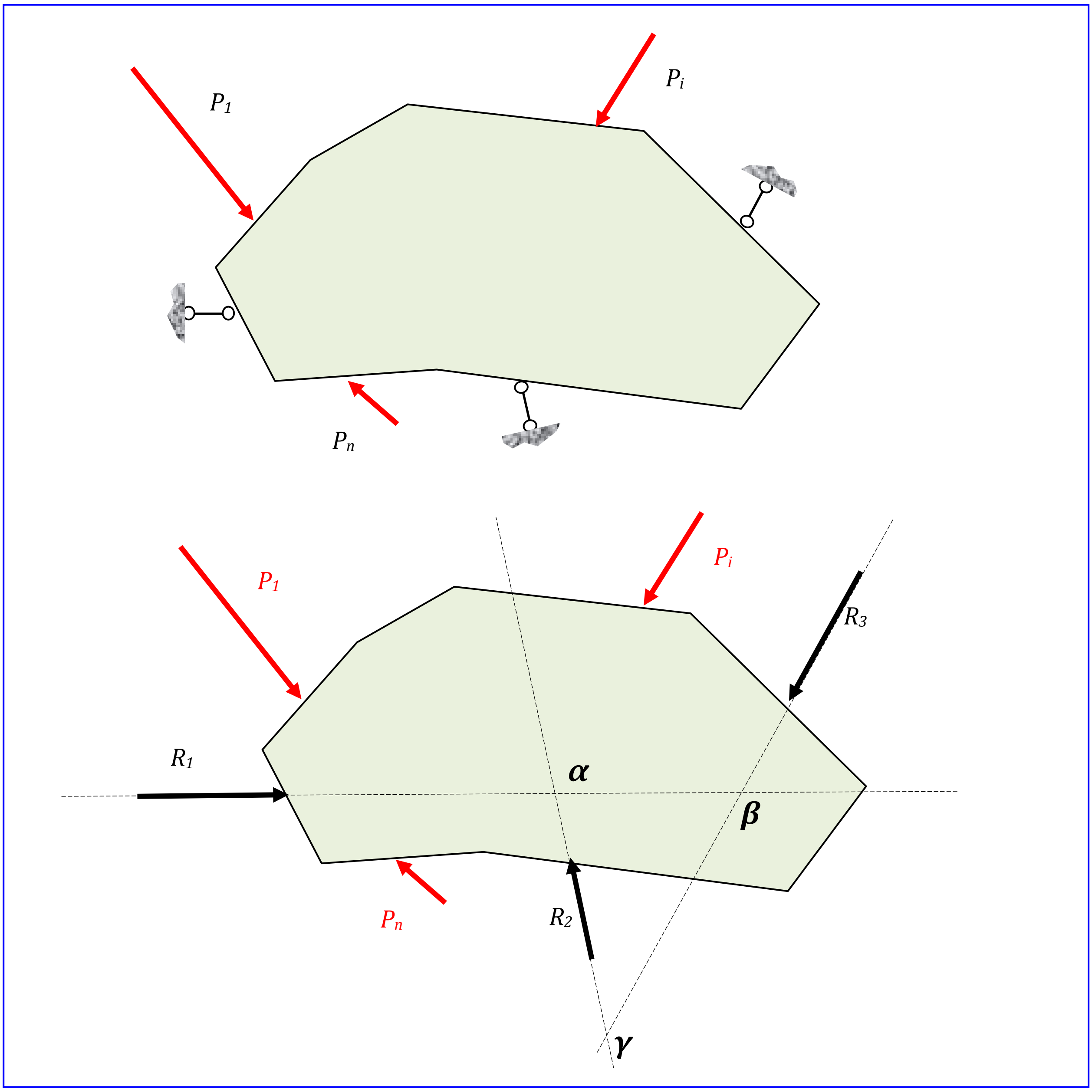

Рис.3- 1

А:- А если на тело наложено, например, 4-е связи, как это было в примере Рис.2- 11, *можно составить еще одно, четвертое уравнение, ну, например уравнение моментов, относительно еще одной точки и найти из него четвертую реакцию. Я прав?*

Нет, увы. Составить такое уравнение, несомненно, можно, а вот найти четвертую реакцию не получится. Дело в том, что это четвертое уравнение будет линейной комбинацией первых трех и система уравнений окажется несовместной. Для нахождения более чем 3-х неизвестных опорных реакций, в статически неопределимых системах, необходимо составлять уравнения другой природы. Далее мы увидим, что это возможно, если рассматривать тело, как деформируемое.

Теоретическая механика занималась условиями равновесия абсолютно твердого тела, а в нашем случае расчетный элемент, стержень, деформируется под действием внешней нагрузки. Поэтому придется рассмотреть, чем отличается поведение деформируемого стержня от поведения абсолютно-жесткого тела в смысле условий равновесия.

Рассмотрим стержень, имеющий возможность деформироваться, под действием внешней сосредоточенной силы, при этом все точки его продольной оси будут оставаться в плоскости, в которой они были и до деформирования. В той же плоскости находятся и опорные связи, и внешняя нагрузка (см. Рис.3- 2).

Под действием внешней нагрузки стержень деформируется, как показано на Рис.3- 2.

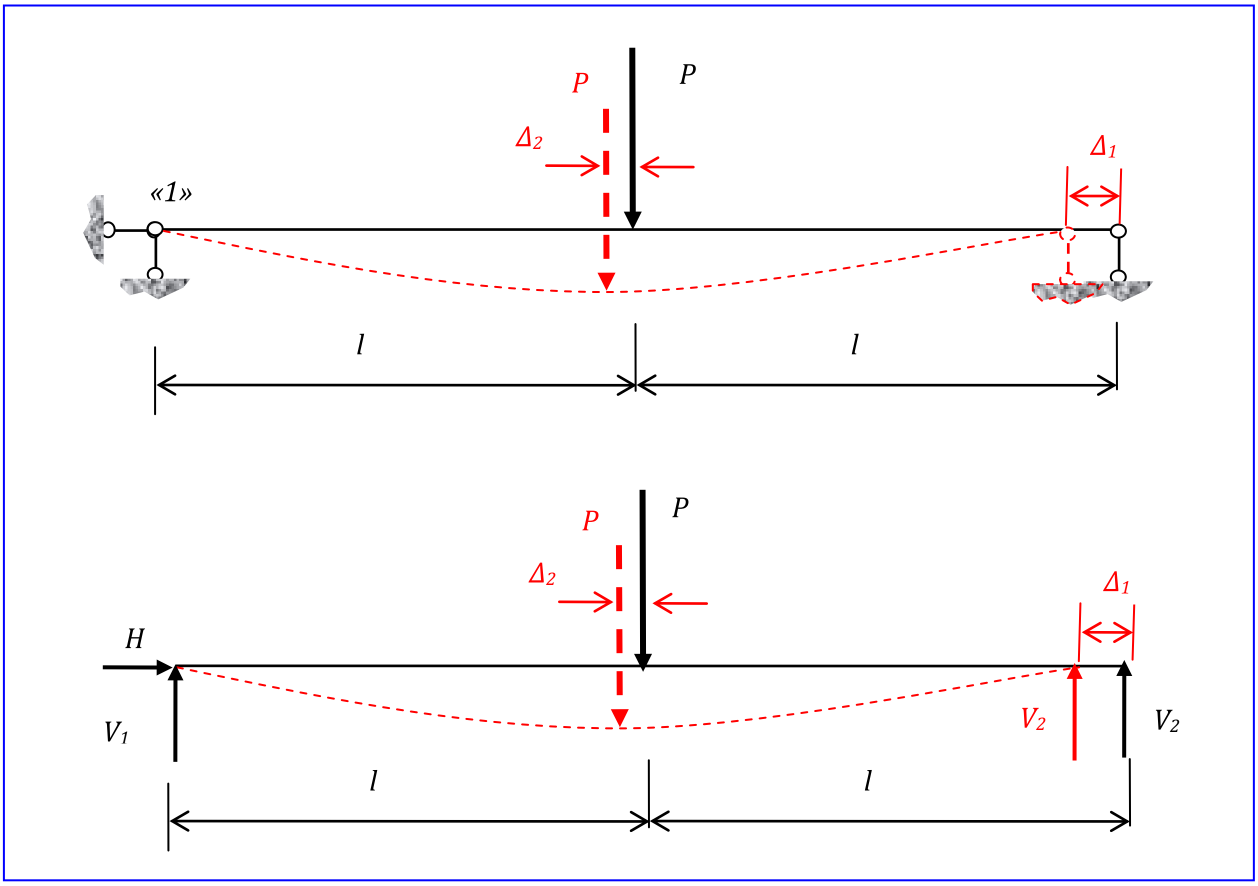

Рис.3- 2

При этом внешняя сила P и правая опорная связь переместятся влево на величины Δ_2 и Δ_1, соответственно. Деформированная система неподвижна. Пользуясь, известным из теоретической механики, принципом отвердевания, можем для стержня, с удаленными связями и приложенными вместо них опорными реакциями, составить уравнения равновесия, такие же, как для абсолютно твердого тела.

Составим уравнение равновесия, для определения V_2:

$$\sum m_{1i} = 0; \qquad P(l - \Delta_2) - V_2(2l - \Delta_1) = 0$$

откуда

$$V_2 = \frac{(l - \Delta_2)}{(2l - \Delta_1)} P.$$

Если бы стержень был недеформируемым, тоже уравнение имело бы вид:

$$Pl - V_2 2l = 0; \quad V_2 = 0{,}5P.$$

На первый взгляд решения, «красное» для деформируемой системы и «черное» для недеформируемой, одинаковы и из них одинаково просто определить опорную реакцию V_2 или V_2. Однако, это совершенно не так. Если во втором случае, коэффициент, через который V_2 выражается через Р найден однозначно, то для определения величины аналогичного коэффициента в первом случае, сначала, потребуется выяснить величины Δ_1 и Δ_2, а эта задача не из простых. Действительно, чтобы найти эти величины придется вычислить прогибы балки, а, как будет показано ниже, это можно будет сделать после того, как найдется значение опорной реакции V_2. Замкнутый круг. Чтобы найти реакцию, надо предварительно ее знать. Другими словами, наша задача становится НЕЛИНЕЙНОЙ.

Однако, все можно сильно упростить, если ввести представление о малости перемещений, которые возникают в стержне, в связи с его деформацией. Другими словами, если Δ_1 и Δ_2 настолько малы, что $(l - \Delta_i)$ можно считать равным l, то «красное» уравнение не будет отличаться от «черного» и задача по определению опорной реакции для деформируемой системы станет линейной.

Отсюда делаем следующий вывод:

если перемещения деформируемой системы малы по отношению к ее размерам, то уравнения равновесия, для определения опорных реакций (и не только), возможно составлять, используя размеры недеформированной исходной системы. Другими словами, уравнения равновесия составляются также, как и для абсолютно-жесткого тела.

А:- это совершенно не понятно. Как же так, если мы сопоставляем деформируемое тело и недеформируемое, тогда, то, что их отличает, как раз и есть наличие перемещений, порожденных деформациями в первом случае и отсутствие таковых, во втором. А Вы предлагаете этими перемещениями пренебречь. Если так поступить, то, как мне кажется, грань между деформируемым и недеформируемым телами пропадет.

Это не так. Я хочу подчеркнуть, что я предлагаю пренебрегать перемещениями, возникающими из-за деформаций по сравнению с линейными размерами конструкции, но не считать их равными нулю. В математической форме это будет эквивалентно следующим утверждениям:

$$\Delta + \Delta = 2\Delta, \qquad \text{но } \Delta + l = l.$$

Практически, это условие выполняется для большинства конструкций, на которые накладываются эксплуатационные требования к их жесткости. Ну, например, если кузов автомобиля запроектировать недостаточно жестким, то есть таким, который позволит при езде получать заметные перемещения его частей друг относительно друга, то, первое, что произойдет, – выпадут стекла, двери будут скрипеть и тереться о проемы. В общем, ехать будет неприятно и даже страшно. В правильно спроектированном автомобиле мы не наблюдаем заметных глазу перемещений отдельных частей кузова, а значит, для расчета его можно полагать, что перемещения несопоставимо малы, по сравнению с размерами автомобиля, и здесь можно использовать линейные уравнения. Другое дело, подвеска автомобиля. В этом случае при проектировании стремятся, что бы перемещения ее частей, относительно кузова, связанные с деформациями упругих элементов (пружин) были бы достаточными, для комфортного восприятия дорожных неровностей. Поэтому, при расчете подвески, придется пользоваться нелинейными зависимостями, т.к. упругие перемещения, в этом случае, оказываются сопоставимы с размерами элементов подвески.

Чтобы почувствовать сказанное на «своей шкуре» предлагаю провести следующий эксперимент. Если у вас есть возможность, выйдите в средину пролета автомобильного моста (конечно, это нужно делать только там, где на мосте есть тротуары для движения пешеходов, и уходить в средину пролета нужно именно по ним) и дождитесь, когда по мосту проедет автомобиль. Вы обязательно почувствуете, как под вами прогнулся мост. Более того, если пролет моста имеет достаточно большую длину, а проехал тяжелый самосвал, то ощущение будет не очень приятное. (Некоторые люди могут испытать легкую панику :-)). Хотя, на глаз, это перемещение зафиксировать вряд ли удастся. Теперь перейдите на опору моста, в то место, где заканчивается пролетное строение и начинается «земля». Дождитесь нового автомобиля и попробуйте заметить горизонтальное перемещение конца пролета, относительно земли. Если пролет моста довольно длинный, а вы имеете зоркий глаз, то, может быть, вам удастся заметить «шевеление» конца пролетного строения. Если вы его все-таки заметили, сопоставьте величину этого перемещения с длиной полета. Вот так вы и почувствовали, что упругие системы под нагрузкой имеют перемещения, связанные с деформированием их элементов, а если эти конструкции правильно запроектированы (вспомните, что вы чувствовали стоя в средине пролета), то перемещения эти несопоставимы с размерами самих конструкций.

Рассмотрим пример определения опорных реакций. На Рис.3- 3 представлен стержень, загруженной распределенной нагрузкой, и сосредоточенным моментом. Требуется определить опорные реакции, возникающие от такого загружения.

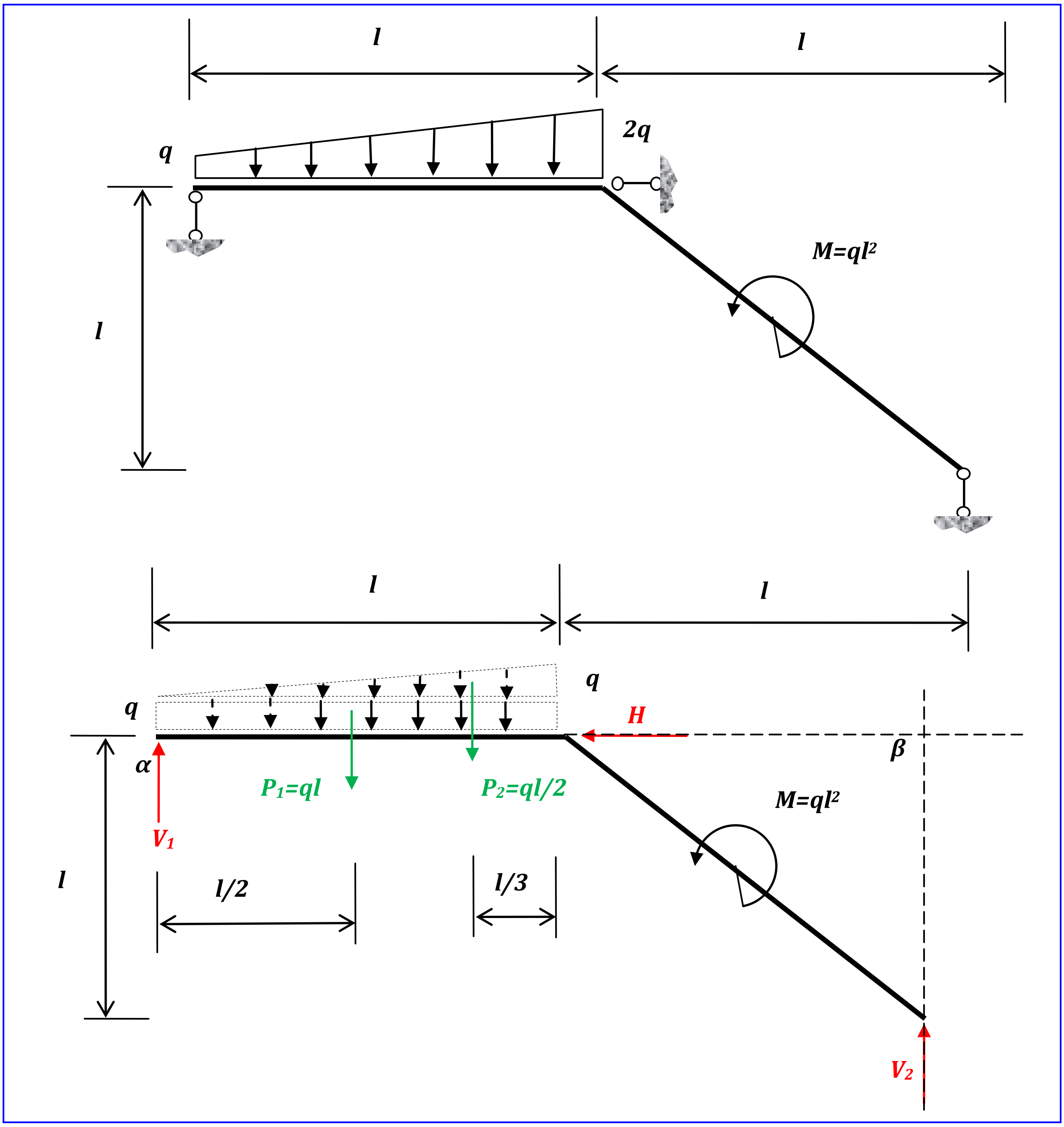

Рис.3- 3

Отбросим связи и заменим их опорными реакциями (V_1; V_2; H). Одновременно с этим представим распределенную нагрузку ее равнодействующей, при этом, чтобы не заниматься поиском положения равнодействующей (центра тяжести трапеции) представим распределенную нагрузку как сумму двух распределенных. А именно, равномерно-распределенной с интенсивностью q и «треугольной», как это показано в нижней части Рис.3- 3. А теперь, заменим первое из слагаемых равнодействующей $P_1 = ql$, приложенной на расстоянии $l/2$, от левого конца стержня и $P_2 = 0{,}5ql$ - равнодействующей «треугольной» нагрузки. Сила P_2 будет расположена на расстоянии $l/3$ от точки приложения опорной реакции H.

Теперь, считая, что перемещения, связанные с деформацией конструкции малы, по сравнению с ее размерами, составим систему уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum m_\alpha = 0; \quad V_2\, 2l - \frac{P_2 2l}{3} - \frac{P_1 l}{2} + M = 0 \\ \sum m_\beta = 0; \; V_1\, 2l - \frac{P_1 3l}{2} - \frac{P_2 4l}{3} - M = 0 \\ \sum X = 0; \qquad\qquad\qquad\qquad H = 0. \end{cases}$$

При составлении этой системы уравнений в качестве моментных точек выбраны: α – как точка пересечения H и V_1 , β как точка пересечения H и V_2. Поскольку V_1 и V_2 пересекаются в бесконечности, третье уравнение равновесия составляется в виде суммы проекций всех сил на горизонтальную ось.

Заметим, что получена система уравнений, в которой все уравнения независимы, поэтому решение ее находится элементарно:

$$\begin{cases} \boldsymbol{V_2} = \frac{P_2}{3} + \frac{P_1}{4} - \frac{M}{2l} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) ql - \frac{ql^2}{2l} = -\boldsymbol{\frac{ql}{12}} \\ \boldsymbol{V_1} = \frac{2P_2}{3} + \frac{3P_1}{4} + \frac{M}{2l} = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) ql + \frac{ql^2}{2l} = \boldsymbol{\frac{19ql}{12}} \\ \boldsymbol{H = 0}. \end{cases}$$

Заметим, что V_2 получилось со знаком « - », это говорит о том, что при такой нагрузке правая опорная реакция будет направлено не снизу вверх, как предполагалось на Рис.3- 3, а наоборот сверху вниз. Для проверки полученных результатов составим уравнение «сумма проекций всех сил на вертикальную ось равна нулю», которое должно обратиться в тождество, если опорные реакции найдены правильно.

$$\sum Y = 0; \; V_1 + V_2 - P_1 - P_2 = 0; \; \frac{19ql}{12} - \frac{ql}{12} - ql - \frac{ql}{2} = 0; \quad 0 = 0$$

Значит, задача решена, верно.

А:- Как же так? Ранее Вы говорили, что можно составить только 3-и уравнения равновесия, сами составляете 4-е для проверки. Кроме того, при составлении первых двух уравнений не понятно, какое правило знаков применялось. В 1-м, из них, положительными считались моменты, направленные против хода часовой стрелки, а во 2-м – по ходу. Разве так можно делать?

По поводу первой части вопроса. Я не говорил, что нельзя составлять больше 3-х уравнений равновесия. Я говорил, о том, что 4-е, 5-е и все следующие уравнения будут линейной комбинацией первых трех. Именно этот факт я и использовал, для проведения проверки. Чтобы ее выполнить, я должен был бы подставить найденные неизвестные в каждое из уравнений системы и убедится, что они обращаются в тождества. Вместо этого, я составил линейную комбинацию первых трех уравнений – 4-е уравнение и произвел подстановку в него. Замечательно, что я не только проверил арифметику решения системы уравнений равновесия, но, и правильность их составления. Подумайте, почему?