

## 12. Теории прочности

На первый взгляд непонятно, почему при изучении простейших сопротивлений, таких как растяжение-сжатие и кручение нам удавалось решать задачи прочности, т.е. для таких сопротивлений были найдены способы и получены расчетные формулы для оценки прочности существующих конструкций или для определения геометрических параметров поперечных сечений стержней, которые обеспечили бы прочность проектируемых конструкций. Почему, в задачах изгиба не применить те же подходы, которые мы использовали раньше?

Для ответа на этот вопрос, вернемся к рассмотрению задач прочности при растяжении-сжатии и кручении. Если мы еще раз посмотрим разделы [Вычисление напряжений в растянутых \(сжатых\) стержнях. Решение задачи прочности](#) и [Кручение валов круглого поперечного сечения. Теория напряжений.](#), то обратим внимание на то, что напряженное состояние, развивающееся в стержнях в этих случаях, очень простое и легко воспроизводимо в экспериментах.

Действительно, при растяжении, во всех точках поперечного сечения, а при отсутствии распределенных нагрузок и в бесконечно большой группе рядом расположенных поперечных сечений, возникают только нормальные напряжения, притом, одинаковые по величине. В этом случае, вполне естественно предположить, что разрушение элемента конструкции, работающего в условиях растяжения, следует ожидать при таком уровне напряжений, при котором происходит разрушение образца, растягиваемого в испытательной машине в лаборатории. Поэтому, даже не интересуясь природой разрушения, можно говорить о том, что если в лаборатории, образец из некоторого материала, имеющий площадь поперечного сечения  $A_0$ , разрушается при нагрузке на него, равной  $P$ , т.е. когда нормальные напряжения в этом образце равны  $\sigma_{\text{пр}} = P/A_0$ , то элемент реальной конструкции, выполненный из того же материала, и имеющий площадь поперечного сечения  $A = kA_0$ , разрушится при нагрузке в  $k$  раз большей, чем в эксперименте, т.е. тогда, когда напряжения в точках его поперечных сечений станут равными  $\sigma_{\text{пр}} = kP/kA_0$ .

Так можно поступать и для хрупких материалов и для пластичных, несмотря на то, что в последнем случае, при рассмотрении прочности, а точнее несущей способности, речь идет не о разрушении, а только о стремительном росте деформаций, который наблюдаются при напряжениях равных пределу текучести.

Аналогичную ситуацию можно наблюдать и при кручении стержней круглого поперечного сечения. Несмотря на то, что в точках стержня реализуется уже плоское напряженное состояние, получившее название «чистый сдвиг», его, из-за наличия все той же, что и при растяжении, однородности, легко сопоставлять с результатами экспериментов, проводимыми над образцами, скручиваемыми в испытательной машине. В этом случае, аналогично растяжению, говорят о пределе текучести для пластичных материалов, понимая под ним величину касательных напряжений, действующих в поперечных сечениях, при которой начинается бурное развитие пластических деформаций и о

пределе прочности при кручении, имея ввиду опять же касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении, при разрушении скручиваемого образца из хрупкого материала. При этом, в последнем случае, причиной разрушения служат главные растягивающие напряжения, действующие на площадках, повернутых на угол в  $45^\circ$ , по отношению к поперечным сечениям (см. Рис.9- 13).

Совсем по-другому выглядит ситуация при поперечном изгибе или в случае сложного сопротивления, когда в поперечном сечении стержня, в разных его точках, возникают разные комбинации нормальных и касательных напряжений, определяющие плоское напряженное состояние. Примером тому может служить распределение напряжений, показанное на Рис.11- 25 или Рис.11- 30, когда даже трудно решить, в какой из точек реализуется более опасное состояние.

Понятно, что в этом случае уже трудно осуществить лабораторный эксперимент, результаты которого столь просто можно было бы перенести в «натуру», как это было в случае растяжения или кручения.

Как должен выглядеть эксперимент, результаты которого можно было бы использовать для решения задачи прочности при поперечном изгибе?

Очевидно, что это не может быть балка, которую доводят до разрушения в испытательной машине, потому, что условия, в которых может быть разрушена конкретная балка, трудно обобщить на всевозможные случаи работы изгибаемой конструкции. Это касается как условий нагружения, так и форм поперечных сечений. В рассматриваемом случае поперечного изгиба или даже сложного сопротивления помог бы эксперимент, в котором в образцах, сделанных из конкретного материала, можно было бы создавать «всевозможные» виды плоского напряженного состояния, однородного по объему образца, доводя образец каждый раз до разрушения.

Сам по себе напрашивается эксперимент, в котором в образце одновременно реализуются два сопротивления: растяжение и кручение. Если, при этом, образец выполнен в виде тонкостенной трубы, толщина стенки которой настолько невелика, что можно было бы пренебречь изменением величины касательного напряжения вдоль радиуса, однородность напряженного состояния была бы обеспечена с достаточной точностью. На Рис.12- 1 показан такой образец. Очевидно, что если площадь поперечного сечения его равна  $A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r) * t \cong 2\pi Rt$ , то нормальное напряжение

$$\sigma_z = \frac{N}{2\pi Rt},$$

а касательное –

$$\tau_{zx} = \frac{M_z}{2\pi R^2 t}.$$

Теперь представим себе, что для образца выбирается вполне определенной соотношение между нормальным и касательным напряжением

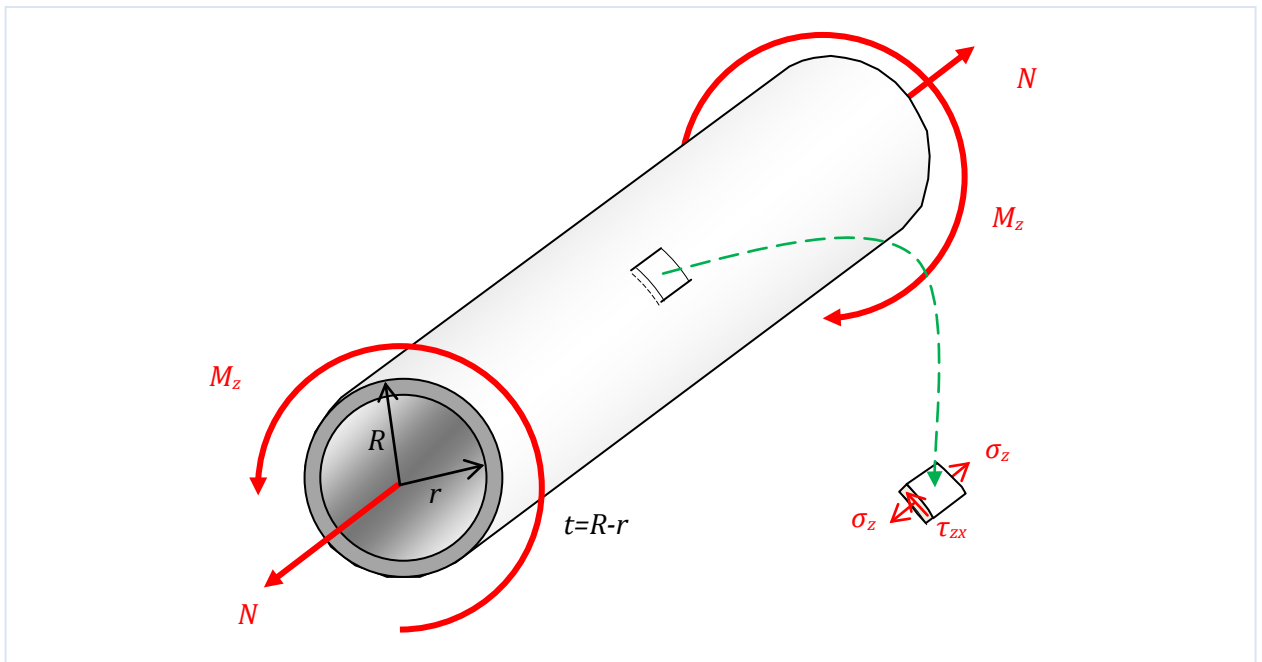


Рис.12- 1

$$\vartheta = \frac{\sigma_z}{\tau_{zx}}$$

что легко осуществляется, если реализуются внутренние силовые факторы, такие, что

$$\vartheta = \frac{N * R}{M_z} \quad \text{или} \quad N = \vartheta * \frac{M_z}{R},$$

которые, очевидно, совпадают по величине с внешними воздействиями: растягивающей силой и скручивающим моментом.

Представим состояние образца на диаграмме в осях  $\sigma - \tau$ , показанной на Рис.12- 2.

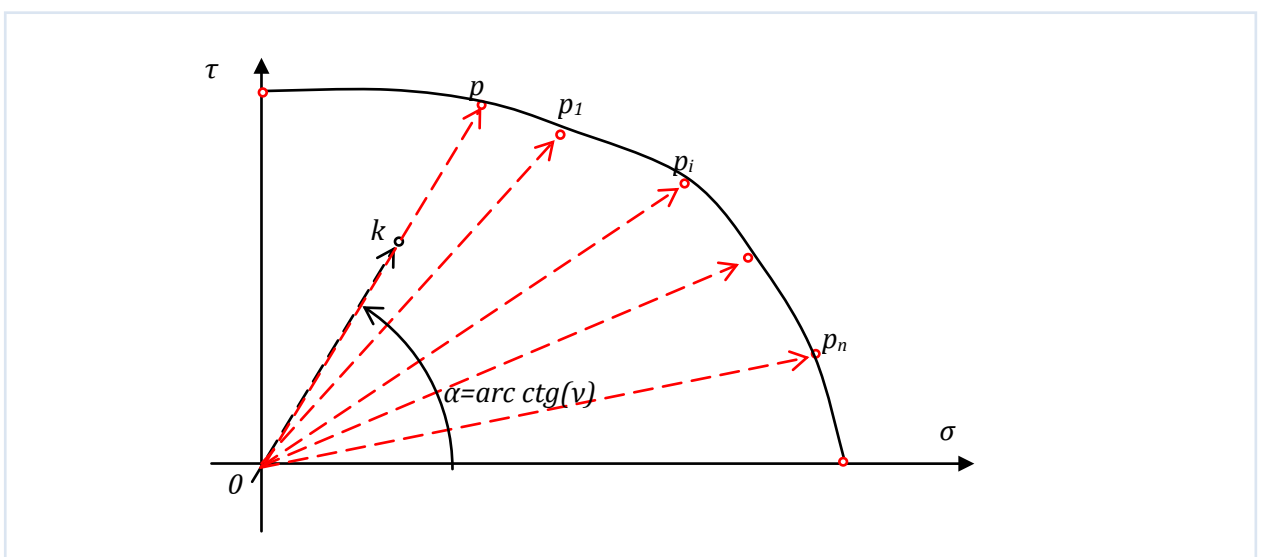


Рис.12- 2

Точка  $k$  и есть это состояние, тогда, как вектор  $\overrightarrow{0-k}$  - геометрическое место точек, каждая из которых, - есть состояние образца, при его нагружении от  $N = M_z = 0$  до текущего состояния, при сохранении одинакового соотношения между нормальным и касательным напряжением (продольной силой и крутящим моментом).

Представим далее, что внешние воздействия, сохраняя заданное соотношение между ними, продолжают увеличиваться до тех пор, пока не будет исчерпана несущая способность образца. Этому предельному состоянию, на диаграмме Рис.12- 2, соответствует точка  $p$ .

Возьмем новый образец, установим для него другое соотношение между напряжениями  $\vartheta_1$  и, нагружая его до потери несущей способности, получим точку  $p_1$ . И так далее. Конечно, нужно было бы выделить два образца, чтобы исследовать «крайние» состояния: чистое растяжение  $\vartheta = \infty$  и чистое кручение  $\vartheta = 0$ .

Результатом наших экспериментов была бы некоторая кривая «предельных состояний». При этом, все точки (состояния образца) лежащие между этой кривой и началом координат, определяют «безопасное» состояние образца.

Далее, когда кривая предельных состояний, для рассматриваемого материала, получена, можно было бы перейти к определению предельных нагрузок для нашей балки. Для этого нужно нанести на диаграмму напряжения, определяющие напряженное состояние в характерных точках опасного сечения.

Возьмем в качестве примера рассмотренный выше случай сложного сопротивления (см. Рис.11- 30). В качестве «подозрительных» рассмотрим две точки «2» и «4а». В первой из них действует только нормальное напряжение  $\sigma_{"2"} = 680 \frac{q}{a}$ , а во второй и нормальное и касательное  $\sigma_{"4a"} = -605 \frac{q}{a}$ ;  $\tau_{"4a"} = 406 \frac{q}{a}$ . Предположим так же, что материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, поэтому можем не обращать внимания на знак  $\sigma_{"4a"}$ . Изобразим состояние рассматриваемых точек на диаграмме «предельных состояний» Рис.12- 3. Пусть точки «2» и «4а», обе, окажутся расположенными внутри области, ограниченной кривой «предельных состояний» и осями координат. Это будет означать, что в обеих точках рассматриваемого стержня условие прочности удовлетворяется. Таким образом, мы решили задачу проверки прочности «существующей» конструкции. Больше того, продолжая наши рассуждения, мы сможем оценить запас прочности стержня. Действительно, мысленно продолжая нагружение конструкции, увеличивая внешние нагрузки пропорционально одному параметру и наблюдая, при этом, за поведением точек на диаграмме Рис.12- 3, можем убедиться в том, что точка «4а» первой «доберется» до кривой «предельных состояний» («4а+»). Именно в этот момент можно зафиксировать потерю несущей способности нашего стержня, а искомый запас прочности может быть определен отношением длины вектора  $\overrightarrow{0 - "4a + "}$  к длине вектора  $\overrightarrow{0 - "4a"}$ .

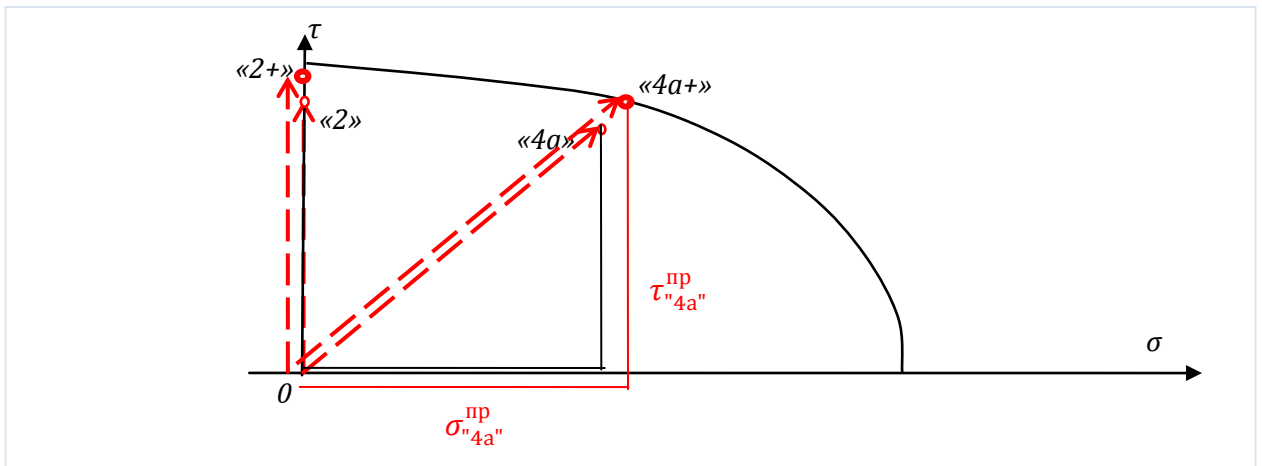


Рис.12- 3

Решить 2-ю задачу прочности, задачу подбора размеров поперечного сечения (задачу проектирования), для простейших поперечных сечений, типа прямоугольного, можно так же элегантно, как в задачах на простое растяжение или кручение. Так, выяснив, что опасной является точка «4а», по диаграмме Рис.12- 3 можем найти предельные значения для нормального и касательного напряжений  $\sigma_{4a}^{пр}$  и  $\tau_{4a}^{пр}$ , далее определить характерный размер сечения  $a$ , пользуясь любым из очевидных соотношений:

$$\sigma_{4a}^{пр} = 605 \frac{q}{a} < \sigma_{4a+}^{пр}; \quad \tau_{4a}^{пр} = 406 \frac{q}{a} < \tau_{4a+}^{пр}.$$

При этом, очевидно, предполагается, что при нагружении конструкции нормальное и касательное напряжение, возникающие в опасной точке поперечного сечения, растут пропорционально одному параметру. Что, конечно же, выполняется при нагружении конструкции статической нагрузкой, возрастающей пропорционально тому же параметру.

Таким образом, если для материала построена кривая предельных состояний, решение задач прочности не представляет никаких затруднений. Однако, на практике, все как раз и упирается в это «пресловутое» «ЕСЛИ». Дело в том, что выполнить, описанный выше, эксперимент с растянуто-закрученной тонкостенной трубой не так-то просто. Действительно, целью каждого отдельного эксперимента является получение точки на кривой предельных состояний, соответствующей разрушению или потере несущей способности образца, из-за наступления текучести. Однако, такой тонкостенный образец будет стремиться «сложиться», как это делает банка из под пива (см. Рис.9- 22), поэтому нужно очень тщательно подбирать его размеры и точно изготовить. Количество таких образцов должно быть достаточно велико, что еще больше усложняет эксперимент. Еще труднее осуществить такой эксперимент, для материалов, по разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, ведь в этом случае тонкостенная труба должна быть доведена до разрушения при приложенном к ней сжимающих усилия, что многократно повысит вероятность потери устойчивости ее стенки до возникновения трещин.

Проведение серии таких экспериментов возможно, но только в условиях научно-исследовательской лаборатории, но никак не в заводской, где проводят испытания

образцов выпускаемых сталей, и тем более не строительной, где испытывают бетонные образцы. И дело здесь даже не в том, что научно-исследовательская лаборатория, как правило, имеет более совершенное оборудование для изготовления и испытания образцов и более подготовленные кадры. Все упирается в стоимость таких экспериментов, которая на несколько порядков может превышать стоимость традиционных испытаний на растяжение или сжатие «стандартных» образцов.

Вот поэтому, принято, для решения задач прочности, использовать, так называемые, теории прочности, каждая из которых представляет собой некую гипотезу о причинах разрушения материала, действующую как в условиях сложного напряженного состояния, так и в простейших случаях сопротивления, которые можно легко воспроизвести в эксперименте. Таких гипотез можно предложить несколько.

Вот одна из них, получившая название 1-й теории прочности или теории прочности по главным нормальным напряжениям. Эта гипотеза утверждает, что, ***независимо от вида напряженного состояния, разрушения материала, в некоторой точке твердого тела, следует ожидать в тот момент, когда главное нормальное напряжение  $\sigma_1$ , действующее в этой точке, достигнет некоторого предельного значения.***

Условие прочности, соответствующее 1-й теории прочности, можно записать в следующем виде:

$$\sigma_1 < [\sigma],$$

(Ф.12-1)

где  $[\sigma]$ - предельно допустимое значение нормального напряжения для данного материала. Поскольку условие прочности (Ф.12-1) должно соблюдаться для любого напряженного состояния, то для случая чистого растяжения можно записать:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} < [\sigma].$$

Другими словами  $[\sigma]$  может быть определено в экспериментах с растяжением образцов путем деления величины разрушающей нагрузки  $[N]$  на первоначальную площадь поперечного сечения образца.

К сожалению, такая простая и интуитивно понятная гипотеза прочности, имеет существенные недостатки.

Во-первых, формулировка условия прочности в таком виде для пластичных материалов, противоречит здравому смыслу. Ведь известно, что появление текучести при растяжении таких материалах связано со сдвигами (движением дислокаций), поэтому привязывать момент наступления предельного состояния к главным нормальным напряжениям не имеет под собой физического смысла и, как будет показано ниже, противоречит результатам экспериментов.

Во-вторых, и для хрупких материалов эта гипотеза работает далеко не всегда. Конечно, для случая растяжения или даже закручивания стержней из хрупких материалов, когда разрушение их осуществляется путем «отрыва» одной части стержня от другой (см. верхнюю часть Рис.9- 10), соответствие эксперимента и 1-й теории прочности будут весьма удовлетворительными. Однако, хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению и хорошо – сжатию. Поэтому их и используют, чаще всего, в таких элементах конструкций, которые при эксплуатации постоянно сжаты. А вот как раз разрушение сжатых элементов 1-я гипотеза прочности никак не объясняет.

На Рис.12- 4 представлены результаты испытания на сжатие образца из хрупкого материала, такого как бетон или чугун.

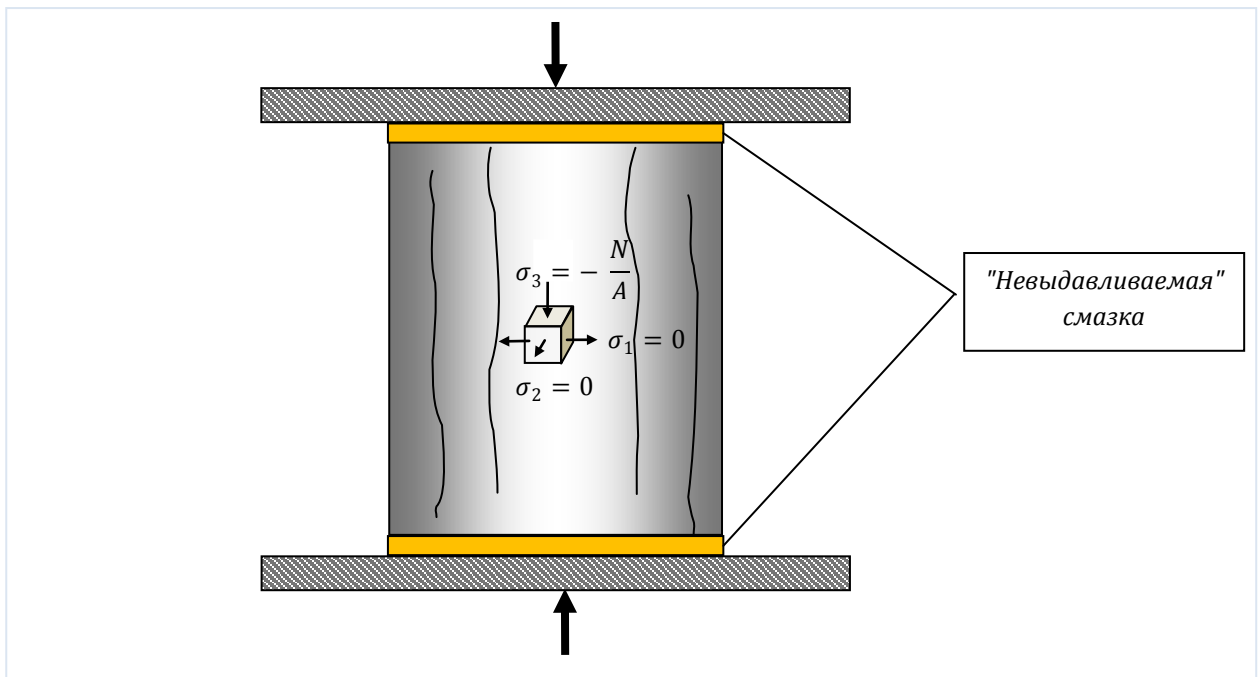


Рис.12- 4

Если образец достаточно короткий и торцы его, опирающиеся на «неформируемые» плиты испытательной машины, смазаны «невыдавливаемой» смазкой, исключающей трение, возникающее при расширении образца от его сжатия за счет поперечной деформации, то разрушение его произойдет путем образования продольных трещин, т.е. опять же за счет отрыва частей образца друг от друга. Однако, в этом случае главные нормальные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , действующее на площадках параллельных продольной оси стержня, от действия которых и могли бы возникнуть такие трещины по 1-й теории прочности, равны 0, тогда как главное нормальное сжимающее напряжение  $\sigma_3 = -\frac{N}{A}$  (см. Рис.12- 4).

Чтобы оправдать результаты, получаемые при сжатии образцов хрупких материалов, предлагаем сформулировать условие их прочности в привязке не к напряжениям, а к удлинениям.

А, именно, 2-я гипотеза прочности может быть сформулирована так: **независимо от вида напряженного состояния, разрушение материала, в некоторой точке твердого тела, следует ожидать в тот момент, когда главная линейная деформация  $\varepsilon_1$ , возникающая в этой точке, достигнет некоторого предельного значения.**

Условие прочности, в этом случае, будет выглядеть так:

$$\varepsilon_1 < [\varepsilon],$$

где  $[\varepsilon]$  - максимально допускаемая деформация, которая должна быть определена из простейших экспериментов с образцами.

Поскольку условия прочности принято формулировать в терминах напряжений, воспользовавшись обобщенным законом Гука (см. (Ф.8- 15)), перепишем предыдущее выражение следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) < [\varepsilon].$$

Теперь вопрос только за определением  $[\varepsilon]$ . Поскольку условие прочности должно выполняться для любого напряженного состояния, то записывая его для случая линейного растяжения, получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(0 + 0)) = \frac{N}{EA} < [\varepsilon].$$

Или

$$[\varepsilon] = \frac{[N]}{EA} = \frac{1}{E}[\sigma].$$

Здесь  $[N]$  – продольная сила, действующая в образце, соответствующая моменту его разрушения. И так, условие прочности, соответствующее 2-й гипотезе, должно быть записано следующим образом:

$$(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) < [\sigma].$$

(Ф.12- 2)

Выражение, стоящее в левой части (Ф.12- 2) принято называть «эквивалентным» (приведенным) напряжением по 2-й теории прочности:

$$\sigma_{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3).$$

*А:- Нет ли здесь ошибки? Ведь 2-ю гипотезу прочности мы формулировали, имея в виду результаты экспериментов со сжатым образцом, а для определения допускаемого напряжения, в условии прочности, предлагается использовать результаты опытов с растянутыми образцами. По-моему, логичнее было бы проводить эксперименты на сжатие.*



Это не так. Или, точнее, не совсем так. Если внимательно прочитать гипотезу, то следует обратить внимание на то, что непременно требуется ее выполнение для любого напряженного состояния. Поскольку, опыты с растянутым образцом выполнить «на порядок» проще, чем, - со сжатым, то именно их и проводят для установления значения  $[\sigma]$ . Хотя, можно было бы проделать тоже самое и для сжатия, если бы была возможность обеспечить абсолютную «невыдавливаемую» смазку, с тем, чтобы исключить влияние трения на результаты определения предельной (разрушающей) нагрузки. Кстати, в этом случае пришлось бы использовать несколько иные зависимости.

Действительно, при сжатии наибольшая главная деформация  $\varepsilon_1$  запишется следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (0 - \mu(0 + \sigma_3)) = -\mu \frac{[N_{сж}]}{EA} < [\varepsilon];$$

откуда

$$[\varepsilon] = \mu \frac{1}{E} [\sigma_{сж}].$$

Интересно, что полученное соотношение можно использовать для экспериментальной проверки 2-й гипотезы, именно, в части, независимости ее от напряженного состояния.

Действительно, если гипотеза прочности выполняется для любого напряженного состояния, то предельная деформация  $[\varepsilon]$  должна получаться одинаковой, как из экспериментов со сжатыми образцами, так и - с растянутыми. Это, то же самое, как если бы

$$\frac{1}{E} [\sigma] = \mu \frac{1}{E} [\sigma_{сж}] \text{ или } [\sigma] = \mu [\sigma_{сж}].$$

(Ф.12-3)

Другими словами, предельные напряжения при растяжении хрупких материалов, должны относиться к предельным напряжениям при сжатии, как значение коэффициента Пуассона для этого материала.

Так ли это на самом деле?

Для некоторых материалов, это, видимо, не так. Выше мы говорили о материалах, которые практически не могут сопротивляться растяжению, но оказывают заметное сопротивление сжатию. Это всякого рода природные камни, «состоящие» из крепких кристаллов, соединенных «прослойками растрескавшейся породы». Предельным случаем такого материала можно назвать песок. Однако, если исключить из рассмотрения такие неоднородные материалы, а сосредоточиться на тех, которые все-таки могут нести растягивающие нагрузки, хотя очень хорошо сопротивляются именно сжатию, то для них такая зависимость выполняется с достаточной точностью.

Вот, например, для конструкционных чугунов, ситуация может быть проиллюстрирована следующей таблицей<sup>18</sup>:

Марка	$[\sigma]$ МПа	$[\sigma_{сж.}]$ МПа	$[\sigma]/[\sigma_{сж.}]$	$\mu$
СЧ12-28	120	500	0,24	0,25-0,27
СЧ15-32	150	650	0,23	
СЧ18-36	180	700	0,26	
СЧ21-40	210	950	0,22	
СЧ24-44	240	1000	0,24	
СЧ28-48	280	1100	0,25	
СЧ32-52	320	1200	0,27	
СЧ35-56	350	1200	0,29	
ВЧ40-10	400	1600	0,25	
ВЧ50-1,5	500	2000	0,25	

Нужно заметить, что даже достаточно тонкие эксперименты, проводимые, например, для тонкостенных трубок, находящихся в условиях растяжения и кручения, хорошо соотносятся со 2-й гипотезой прочности для хрупких материалов типа чугуна, поэтому данную теорию часто используют на практике для решения задач прочности для хрупких материалов.

Расчетную формулу для 2-й теории прочности можно переписать применительно к напряженному состоянию, возникающему в «опасных» точках поперечного сечения, для общего случая задач сопротивления материалов.

Как это видно из примеров определения напряжений, в самом общем случае сложного сопротивления (см. Рис.11- 25, Рис.11- 30, Рис.11- 32) в интересных, с точки зрения проверки прочности, точках поперечного сечения, возникают нормальное ( $\sigma_z$ ) и касательное ( $\tau_{zy}$  или  $\tau_{zx}$ ), при этом, вследствие гипотезы о ненадавливании волокон нормальные напряжения  $\sigma_y$  и  $\sigma_x$  вообще отсутствуют (см. Рис.12- 5).

Это упрощает формулу для определения главных нормальных напряжений, которая, в данном случае, будет иметь вид:

$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_y + \sigma_z)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Таким образом,

$$\sigma_{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{2} \left( (1 - \mu)\sigma + (1 + \mu)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right).$$

(Ф.12- 4)

<sup>18</sup> Значения, представленные в этой таблице, позаимствованы мной из «Сопротивление материалов. 3-изд. Авторы: Кочетов В.Т., Кочетов М.В., Павленко А.Д. СПб: БХВ-Петербург, 2004г»

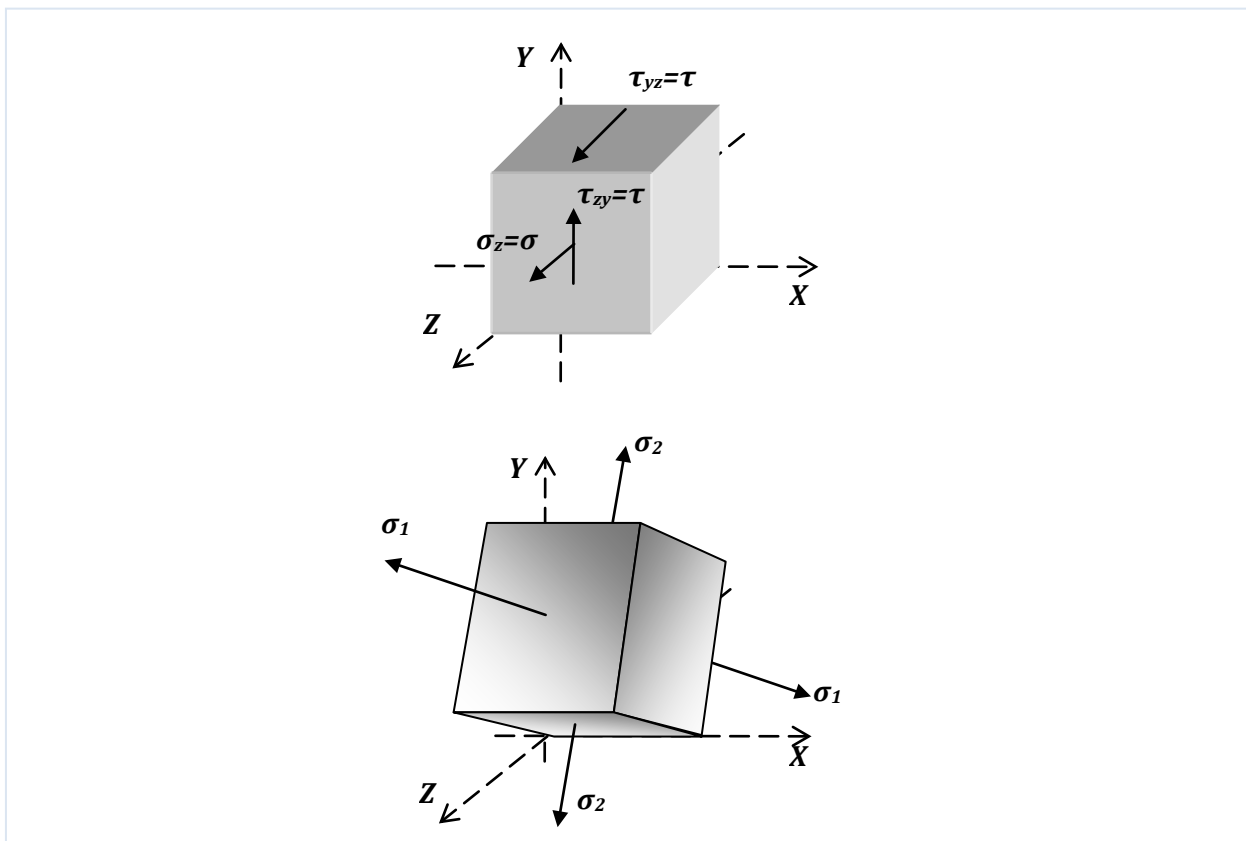


Рис.12- 5

Пример применения 2-й теории прочности.

Пусть в примере Рис.11- 30 стержень выполнен из серого чугуна СЧ28-48, а  $a = 0,025\text{м}$ ;  $q = 3000\text{Н/м}$ .

Рассмотрим две точки в этом поперечном сечении, точку «2», в которой действует только нормальное напряжение

$$\sigma = -680 \frac{q}{a} = 81600000 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 81,6\text{МПа}$$

и точку «4а», где присутствуют как нормальные

$$\sigma = 605 \frac{q}{a} = 72600000 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 72,6\text{МПа},$$

так и касательные

$$\tau = 406 \frac{q}{a} = 48720000 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 48,72\text{МПа}.$$

Вычислим приведенные напряжения по 2-й теории прочности для каждой из этих точек.

$$\sigma_{II}^{2''} = \frac{1}{2} ((1 - \mu)\sigma + (1 + \mu)\sqrt{\sigma^2}) = \sigma = 81,6\text{МПа};$$

$$\begin{aligned}\sigma_{II}^{4a} &= \frac{1}{2}((1 - \mu)\sigma + (1 + \mu)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) = \\ &= \frac{1}{2}((1 - 0,25) * 72,6 + (1 + 0,25) * \sqrt{72,6^2 + 4 * 48,72^2}) = 103,17\text{МПа}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что в обеих точках условие прочности выполняется, т.к.

$$\sigma_{II}^{2} < \sigma_{II}^{4a} < [\sigma];$$

$$81,6\text{МПа} < 103,17\text{МПа} < 120\text{МПа},$$

однако напряженное состояние в точке «4а» ближе к предельному, чем в точке «2».

Используя условие прочности (Ф.12- 2), с учетом (Ф.12- 3) можно решить задачу проектирования, т.е. определить минимальный размер поперечного сечения  $a$ .

$$\begin{aligned}\sigma_{II}^{4a} &= \frac{1}{2}((1 - \mu)\sigma + (1 + \mu)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) < [\sigma]; \\ \frac{1}{2}((1 - \mu)680\frac{q}{a} + (1 + \mu)\sqrt{(680\frac{q}{a})^2 + 4 * (406\frac{q}{a})^2}) &= 506,3\frac{q}{a}; \\ 506,3\frac{q}{a} < 120\text{МПа} \rightarrow a &= \frac{506,3 * 3000}{120 * 10^6} = 0,0127\text{м}.\end{aligned}$$

Для пластичных материалов, таких, например, как цветные металлы или малоуглеродистые стали, рассмотренная выше теория прочности не может быть применена в силу того, что потеря несущей способности элемента конструкции, выполненного из такого материала, как правило, не связана с разрушением его путем отрыва частей. В конструкциях из пластичных материалов стараются не допустить возникновения необратимых пластических деформаций, поскольку это может привести к изменению потребительских свойств конструкции. Как в примере с автомобилем, у которого, из-за пластических деформаций кузова, перестанут открываться двери, будучи заклиненными в дверных проемах. Поэтому, для пластичных материалов, условие прочности формулируется как условие отсутствия пластических деформаций при заданном уровне нагрузки (напряжений). Правильней было это условие называть не условием прочности, а условием пластичности.

Вспоминая о том, что природа пластических деформаций состоит в движении дислокаций, вызванных достижением определенного уровня касательных напряжений, условие прочности по 3-й теории прочности (пластичности) можно сформулировать следующим образом: ***независимо от вида напряженного состояния, потери несущей способности пластичного материала, в некоторой точке, следует ожидать в тот момент, когда наибольшие касательные напряжения, возникающие в этой точке, достигнут некоторого предельного значения.***

Другими словами  $\tau_{max} < [\tau]$ . Учитывая, что в общем случае напряженного состояния

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

условие пластичности можно записать через главные нормальные напряжения:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} < [\tau].$$

(Ф.12-5)

Для определения максимально допустимого касательного напряжения можем использовать опыты на растяжение образцов, фиксируя в них момент возникновения текучести, как момент предельного нагружения. В этом простейшем случае линейного напряженного состояния условие (Ф.12-4) будет иметь вид:

$$\frac{[\sigma]}{2} < [\tau],$$

а само условие 3-й теории прочности примет следующий вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 < [\sigma].$$

(Ф.12-6)

В последних формулах  $[\sigma]$  представляет собой предел текучести при растяжении образца.

Если применять это условие для задач сопротивления материалов, когда напряженное состояние характеризуется нормальным и касательным напряжениями, действующими на площадке, совпадающей с поперечным сечением стержня, как это представлено на Рис.12-5, условие (Ф.12-5) можно записать непосредственно через эти напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2};$$

тогда

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma_{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \text{а} \quad \sigma_{III} < [\sigma]$$

(Ф.12-7)

Интересно, что полученные зависимости для эквивалентных напряжений по 2-й и 3-й теориям прочности можно рассматривать как аппроксимации кривых «предельных» состояний, которые рассматривались выше для иллюстрации экспериментов с растяжением-кручением тонкостенных трубок.

Действительно, если представить себе функции:

$$f_{II} = \sigma_{II} - [\sigma] = 0; \quad \frac{1}{2} \left( (1 - \mu)\sigma + (1 + \mu)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) - [\sigma] = 0 \quad \text{и}$$

$$f_{III} = \sigma_{III} - [\sigma] = 0; \quad \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - [\sigma] = 0,$$

то их графики в осях  $\sigma - \tau$  будут выглядеть следующим образом:

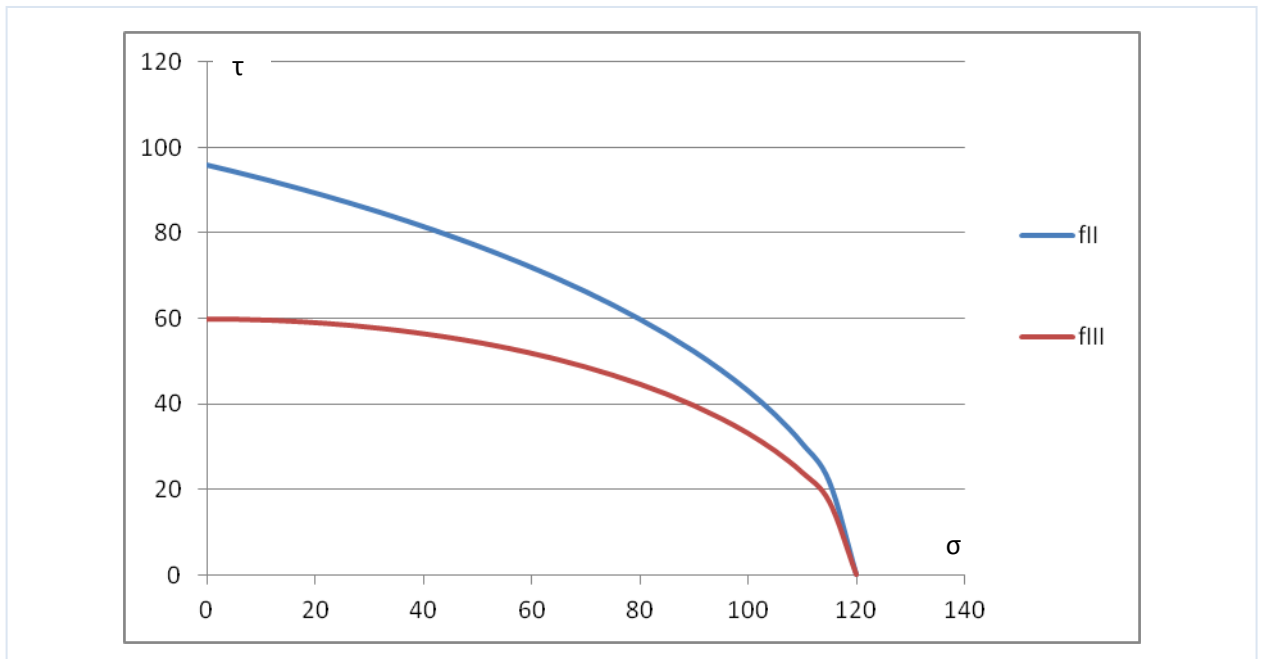


Рис.12- 6

На (Ф.12- 6) показаны графики функций  $f_{II} = 0$  и  $f_{III} = 0$ , применительно к  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$  и  $\mu = 0,25$ .

Опыты с тонкостенными трубками могут служить подтверждением теорий прочности. Так если провести серию опытов с трубками из серого чугуна, доводя их до разрушения путем только скручивания и только растяжения, можно показать, что отношение

$$\frac{\tau_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{пр}}} \approx 0,76 \div 0,85.$$

Тогда, как 2-я теория прочности задает это отношение, как не сложно показать, в виде

$$\frac{\tau_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{пр}}} = \frac{1}{1 + \mu} = \frac{1}{1,25} = 0,8.$$

Аналогично, для трубок из малоуглеродистой стали получается

$$\frac{\tau_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{пр}}} \approx 0,48 \div 0,55.$$

Тогда, как 3-я теория прочности дает:

$$\frac{\tau_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{пр}}} = \frac{1}{2}.$$

Эти и другие эксперименты показывают, что 2-я теория прочности (теория прочности максимальных удлинений) дает хорошее совпадение с результатами экспериментов с разрушением образцов из хрупких материалов, тогда как 3-я теория прочности (теория максимальных касательных напряжений) хорошо подтверждается экспериментами с образцами из пластичных материалов.

А:- А нельзя ли сформулировать такую теорию прочности, которая бы была применима одновременно к хрупким и пластичным материалам?

Такая теория прочности имеется, ее называют 4-й теорией или теорией прочности Мора. Суть ее состоит в том, что кривую предельных состояний представляют в виде огибающей к кругам Мора (см. Рис.12- 7), построенным для разных напряженных состояний образца, находящегося в предельном состоянии. Напомним, что главный круг Мора, представляющий некоторое напряженное состояние в точке, строят в осях  $\sigma - \tau$ , используя только наибольшее и наименьшее из главных напряжений (см. Рис.8- 13).

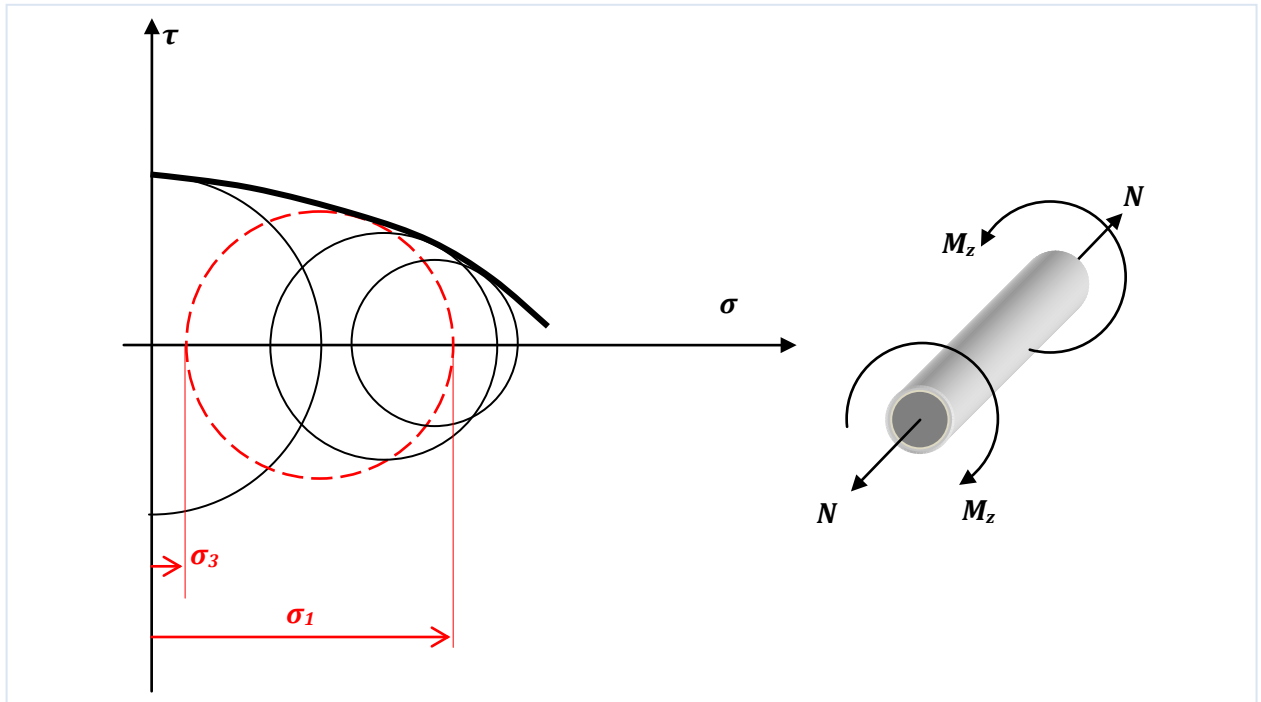


Рис.12- 7

Б:- Для того, что бы построить огибающую придется первоначально построить круги Мора, соответствующие предельным состояниям для различных комбинаций  $N$  и  $M_z$ , а это, то же самое, что построить «кривую предельных состояний», разве не так? Выше говорилось, что построение этой кривой задача очень трудоемкая. Так в чем же выгода от применения этой теории?

А выгода в том, что в рамках 4-й теории, при построении условия прочности, используется не сама огибающая, а простейшее приближение к ней. А именно, прямая, касательная к двум предельным кругам Мора, построенным по результатам испытания образца материала **на растяжение** и **на сжатие**. Ясно, что в этом случае речь идет об обычных цилиндрических образцах, а не о тонкостенных трубках и обычных лабораторных испытательных машинах, т.е. об обычных испытаниях на прочность.

Допустим, что проведены испытания на растяжение и на сжатие, из которых определены допускаемые нормальные напряжения  $[\sigma]$  и  $[\sigma_{сж}]$ , для растяжения и для сжатия, соответственно. Изобразим соответствующие круги Мора (см. Рис.12- 8).

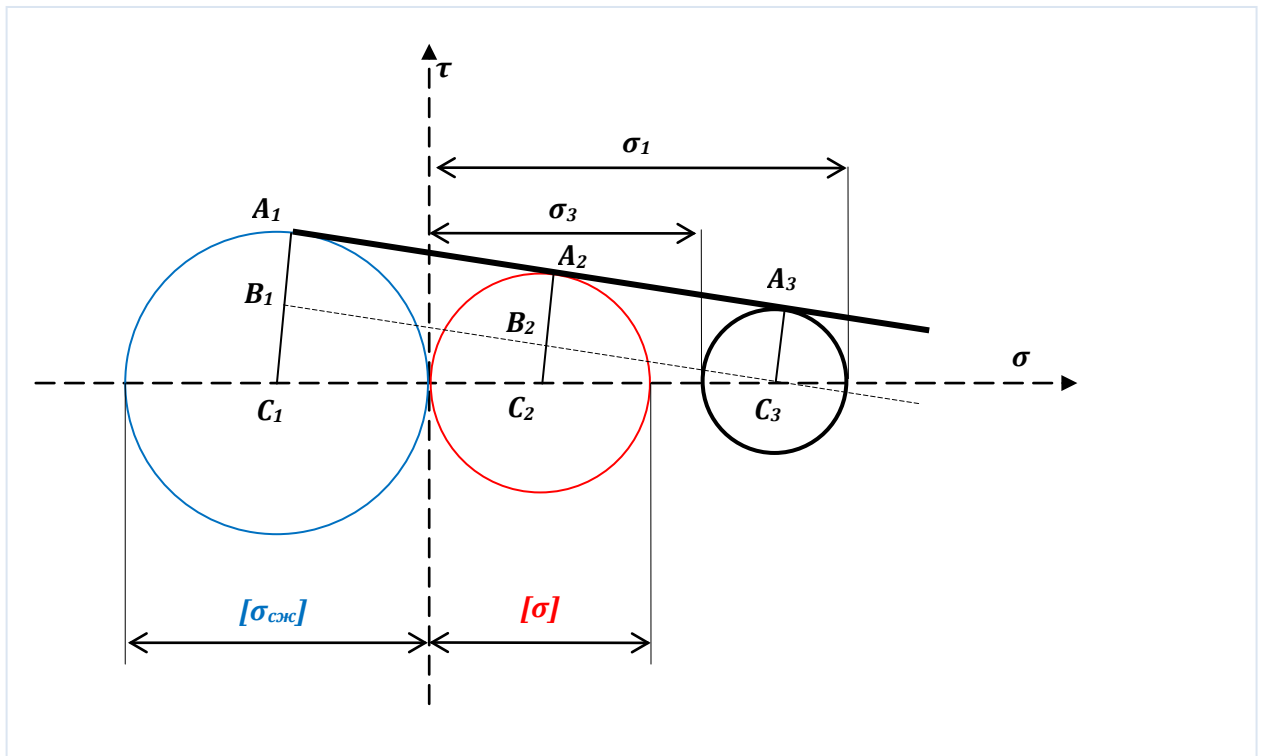


Рис.12- 8

В силу того, что напряженное состояние образца как при испытании на растяжение, так и при испытании на сжатие, - линейное, соответствующие круги Мора (см. Рис.12- 8) будут касаться оси  $\tau$  в начале координат, т.к. в предельном состоянии при сжатии  $\sigma_1 = 0$ ;  $\sigma_3 = -[\sigma_{сж}]$ , а при растяжении, соответственно  $\sigma_1 = [\sigma]$ ;  $\sigma_3 = 0$ . Аппроксимация огибающей на Рис.12- 8 представляется прямой  $A_1 - A_2$ .

Условие прочности для произвольного напряженного состояния будет состоять в том, что соответствующий ему предельный круг Мора должен касаться огибающей прямой в некоторой точке  $A_3$ , т.е. должен располагаться так, как показано на Рис.12- 8.

Это условие можно сформулировать, рассмотрев подобные треугольники  $B_1C_1C_3$  и  $B_2C_2C_3$ , откуда следует, что

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1C_3}{C_2C_3}$$

Учитывая, что

$$B_1C_1 = 0,5[\sigma_{сж}] - 0,5(\sigma_1 - \sigma_3);$$

$$B_2C_2 = 0,5[\sigma] - 0,5(\sigma_1 - \sigma_3);$$

$$C_1C_3 = 0,5[\sigma_{сж}] + 0,5(\sigma_1 + \sigma_3);$$

$$C_2C_3 = -0,5[\sigma] + 0,5(\sigma_1 + \sigma_3)$$

получим



$$\frac{[\sigma_{сж}] - (\sigma_1 - \sigma_3)}{[\sigma] - (\sigma_1 - \sigma_3)} = \frac{[\sigma_{сж}] + (\sigma_1 + \sigma_3)}{-[\sigma] + (\sigma_1 + \sigma_3)}.$$

Выполнив преобразования, запишем условие прочности по 4-й теории:

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]}{[\sigma_{сж}]} \sigma_3 < [\sigma].$$

(Ф.12-8)

Как видно из (Ф.12-8) свойства материала в 4-й теории прочности определяются отношением  $[\sigma]/[\sigma_{сж}]$ , т.е. зависят от поведения материала при растяжении и при сжатии.

Если говорить о пластичных материалах, для которых предельное состояние определяется появлением текучести, а за допускаемое напряжение принято брать предел текучести (или даже близкий к нему и меньший по величине предел пропорциональности), величина которого одинакова как для растяжения, так и для сжатия, то для этих материалов

$$\frac{[\sigma]}{[\sigma_{сж}]} = 1,$$

а (Ф.12-8) совпадает с условием 3-й теории прочности (см. (Ф.12-6)), т.е. будет иметь вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 < [\sigma].$$

Для хрупких материалов, таких как серый чугун, т.е. имеющих разные допускаемые напряжения на растяжение и на сжатие, ранее было установлено соотношение (см. (Ф.12-3)), в силу которого отношение допускаемых напряжений при растяжении и сжатии равны коэффициенту Пуассона, т.е.

$$\frac{[\sigma]}{[\sigma_{сж}]} = \mu,$$

а условие прочности (Ф.12-8) будет иметь вид:

$$\sigma_1 - \mu \sigma_3 < [\sigma],$$

что в точности совпадает с условием 3-й теории прочности (см. (Ф.12-2)), с учетом того, что, из-за «ненадавливаемости» волокон, в задачах сопротивления материалов  $\sigma_2 = 0$ .

Ну, и наконец, для «абсолютно хрупких» материалов, которые вообще не могут нести растягивающие напряжения (см. пример с колонной из каменной кладки «на песке» в разделе [Внецентренное сжатие \(растяжение\)](#)), отношение

$$\frac{[\sigma]}{[\sigma_{сж}]} = 0,$$

а условие прочности (Ф.12- 8) 4-й теории прочности переходит в известное нам условие, полученное при рассмотрении 1-й гипотезы прочности (см. (Ф.12- 1)):

$$\sigma_1 < [\sigma].$$

Таким образом, 4-я теория прочности Мора обобщает все полученные ранее результаты и применима как к пластичным, в форме 3-й теории, так и к хрупким, в виде 2-й теории и даже к «абсолютно хрупким», в виде 1-й теории прочности.

Собственно, на этом можно и остановиться, т.к. рассмотренные теории прочности позволяют, с достаточной для практики точностью, решать задачи проверки прочности или задачи проектирования для стержней и систем, состоящих из совокупности стержней. Другими словами, если в точках конструкции реализуется «упрощенное» плоское напряженное состояние, которое хорошо моделируется совокупностью напряженных состояний простого растяжения и кручения (линейное напряженное состояние и чистый сдвиг), как это было при экспериментах с тонкостенными трубками, то, для хрупких материалов, хорошо согласуется с экспериментом 2-я теория прочности (максимальных удлинений), тогда как для пластичных материалов, оказывается применимой 3-я теория прочности (максимальных касательных напряжений).

Для более сложных случаев объемного напряженного состояния, которое возникает в сплошных телах (средах) подверженных воздействию систем пространственных сил необходимо построение более сложных теорий прочности, использующих представления об энергии деформации. Такие теории были созданы в начале XX века благодаря исследованиям Губера (1904), Мизеса (1913), Генки (1924), Надаи (1937).

Мы не будем здесь рассматривать эти теории, т.к. в задачах сопротивления материалов они дают практически такие же результаты, что и изученные нами теории прочности.